Transformata Fouriera

Definicja, podstawowe własności.

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$(i\partial)^\alpha \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi)$$
$$(i\xi^\alpha)\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi)$$
$$\mathcal{F}(f\circ L) = \frac{1}{|\det L|}\hat{f}\circ L^{-1}$$
$$\mathcal{F}(f(\cdot - y)) = e^{-i\langle y,\xi\rangle}\hat{f}$$

Odwracalność i twierdzenie Plancherela

Zadanie 1. Wykazać, że funkcja $g = \mathcal{F}(e^{-x^2})$ spełnia równanie różniczkowe zwyczajne

$$\frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi) = -\frac{\xi}{2}g(\xi), \qquad g(0) = \sqrt{\pi}.$$

Wywnioskować, że dla każdego $a > 0$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle} e^{-a|x|^2}\,\mathrm{d}x = (\pi/a)^{d/2} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}.$$

Zadanie 2. Dla funkcji Schwartza $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$ wykazać tożsamość

$$(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} e^{-\varepsilon|\xi|^2}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (4\pi\varepsilon)^{-d/2}\left(e^{-\frac{|\cdot|^2}{4\varepsilon}} * f\right)(x).$$

Wywnioskować, że

$$f(x) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Zadanie 3. Oznaczmy $\check{\mathcal{F}}f(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)$. Sprawdzić, że $\overline{\mathcal{F}f} = \check{\mathcal{F}}\overline{f}$, $\overline{\check{\mathcal{F}}f} = \mathcal{F}\overline{f}$ oraz $\mathcal{F}\check{\mathcal{F}} = \check{\mathcal{F}}\mathcal{F} = (2\pi)^d\,\mathrm{id}$.

Zadanie 4. Wyprowadzić tożsamość

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^d} f \hat{g} \qquad \text{dla } f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Wywnioskować twierdzenie Plancherela: $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^{d/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

Transformaty Riesza

Zadanie 5. Dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ oraz $j = 1, \ldots, d$ określamy transfomaty Riesza

$$R_j f := \mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\mathcal{F}(f)\right).$$

Sprawdzić, że

$$\sum_{j=1}^{d} R_j^2 f = -f, \qquad \partial_j \partial_k f = -R_j R_k \Delta f.$$

Zadanie 6. Znaleźć funkcję gładką $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, dla której $\Delta f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ale nie zachodzi równość $\partial_j \partial_k f = -R_j R_k \Delta f$.

Zadanie 7. Wykazać, że dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ oraz $j, k = 1, \ldots, d$ zachodzi nierówność

$$\|\partial_j \partial_k f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\Delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Tę samą nierówność otrzymać przy pomocy całkowania przez części.

Norma Sobolewa

Definicja. Dla funkcji Schwartza $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ definiujemy normę Sobolewa

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi.$$

Zadanie 8. Sprawdzić, że dla $s \in \mathbb{N}$ zachodzi równoważność norm:

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} \approx \sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha f(x)|^2 \, \mathrm{d}x,$$

tzn. każda ze stron jest ograniczona z góry przez drugą z dokładnością do stałej multiplikatywnej zależnej tylko od d, s.

Zadanie 9. Wykazać, że jeśli $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ oraz $2s > d$, to norma $\|\hat{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ jest kontrolowana przez $\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$. Wywnioskować, że $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$.

Zadanie 10. Wykazać, że jeśli $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ oraz $2s > d$, to

$$|f(x) - f(y)| \lesssim |x - y|^{s - \frac{d}{2}} \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \qquad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Zasada nieoznaczoności (zob. blog Terence'a Tao)

Zadanie 11. Sprawdzić, że jeśli $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, to $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
(w następnym zadaniu sprawdzimy, że to najlepsze, co można uzyskać)

Zadanie 12. Wykazać, że jeśli funkcja $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ma zwarty nośnik, to $\hat{f}$ jest funkcją analityczną. Wywnioskować, że

$$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),\ f \not\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{f} \notin C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Zadanie 13. Wykazać *zasadę nieoznaczoności Heisenberga*:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi\right)^{1/2} \geqslant \frac{1}{2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Implikuje ona, że funkcje f i $\hat{f}$ nie mogą być obie skoncentrowane wokół zera.

Wskazówka. Skorzystać ze wzoru na całkowanie przez części

$$\int |f|^2 = -\int x(f\overline{f}' + f'\overline{f}),$$

nierówności Cauchy'ego-Schwarza i twierdzenia Plancherela.